The initial value problem for one-dimensional dispersive partial differential equations

著者	水原 柳一郎
号	48
学位授与番号	2148
URL	http://hdl.handle.net/10097/39193

氏名・(本籍)	水原　柳一郎（みずはら　りゅういちろう）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理博第2148号
学位授与年月日	平成17年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科（博士課程）数学専攻
学位論文題目	The initial value problem for one-dimensional dispersive partial differential equations (一次元分散型偏微分方程式の初期値問題)
論文審査委員	(主査) 教授 高木　泉 教授 小川卓克 助教授 千原浩之

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

初期値や境界値などの付加条件が課された偏微分方程式が与えられたとき，その問題が適切であるか，即ち適当な関数空間の枠組みのもと任意のデータに対して一意解が存在し，かつ解がデータに連続的に依存するか，を調べることは偏微分方程式論における J. Hadamard 以来の基本的な問題の一つである。本論文の目的は1次元空間における3階及び4階分散型初期値問題を考察し，その L^2 空間の枠組みでの適切性を特徴づけることである。

初期値問題において（時間変数に関する偏微分の最高階数）<（空間変数に関する偏微分の最高階数）が成り立つものを 非 Kowalevski 型という。分散型方程式とは非 Kowalevski 型の初期値問題で時間正負の両向きに関して適切となるもののことであり，例として時間発展型 Schrödinger 方程式（2階分散型）や線型化 KdV 方程式（3階分散型）などを含む。

分散型方程式は非 Kowalevski 型であるため，初期値の伝播速度は無限大である。このため L^2 等の大域的制限のついた関数空間の枠組みにおいてでなければ一意可解になることは期待できない。また非コンパクト空間上では解のなめらかさが初期値のそれよりも上昇するいわゆる平滑化効果が起こることがあり，適切性の構造は複雑になる。

1981年，Mizohata は n 次元 Euclid 空間における Schrödinger 型初期値問題が L^2 空間の枠組みで適切となるためには，1階項係数の虚部が，主要部から定まる Hamilton 流に沿った大域的な可積分条件を満たすことが必要（空間次元が1ならば必要十分）であることを示した。

1997年，Tarama は数直線上の1階項つき複素数値線型化 KdV 方程式を考察し，同方程式が L^2 枠で適切となるための必要十分条件を，1階項係数の虚部の増大オーダーを前述の2階の場合にくらべてゆるやかに制限する形で与えた。この条件は主要部から定まる Hamilton 流に沿った1階項虚部の挙動に対する制限と同値である。

これらの結果より，方程式の高階部分から定まる Hamilton 流に沿った低階項の挙動によって 1次元空間における非 Kowalevski 型高階初期値問題の時間両側適切性を特徴づけることができないか，という疑問が生ずる。本論文ではこの問題に対する研究の出発点として，次の3階及び4階初期値問題の L^2 枠における適切性を考察する。

(1.21) $$L_j u = f(t,x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ (j=1 \ \text{or} \ 2),$$

(1.22) $$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R},$$

ここに $u(t,x)$は $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の複素数値未知関数，$f(t,x)$，$u_0(x)$ は与えられた関数，

$$L_1 = D_t - D_x^3 - \alpha(x)D_x^2 - {}_i\beta(x)D_x - \gamma(x),$$

$$L_2 = D_t - D_x^4 - a(x)D_x^3 - b(x)D_x^2 - c(x)D_x - d(x),$$

$i=\sqrt{-1}$，$D_t = -i\partial/\partial t$, $D_x = -i\partial/\partial x$，また $\alpha(x)$, ${}_i\beta(x)$, $\gamma(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)\in\mathscr{B}^\infty(\mathbb{R})$ とする。$\mathscr{B}^\infty(\mathbb{R})$ はすべての導関数が有界であるような C^∞ 級関数全体の集合をあらわす。L^2-適切性の定義は次のように述べられる。

定義1.3 初期値問題 (1.21)-(1.22) が L^2-適切であるとは，任意の $u_0\in L^2(\mathbb{R})$ 及び任意の $f(t,x)\in L^1_{loc}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}))$に対して(1.21)-(1.22) の解$u\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}))$ が唯一つ存在するときをいう。

結果を述べるために L_1，L_2 の係数に対する条件を整理しておく。

(A1) $$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left|\int_x^y \operatorname{Im}\alpha(s)\,ds\right| < +\infty,$$

(A2) $$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y}}\left|\int_x^y \operatorname{Im}\left\{\beta(s)-\frac{\alpha(s)^2}{3}\right\}ds\right||x-y|^{-1/2} < +\infty,$$

(B1) $$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\left|\int_x^y \operatorname{Im}a(s)\,ds\right| < +\infty,$$

(B2) $$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y}}\left|\int_x^y \operatorname{Im}\left\{b(s)-\frac{3}{8}a(s)^2\right\}ds\right||x-y|^{-1/3} < +\infty,$$

(B3) $$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y}}\left|\int_x^y \mathrm{Im}\left\{b(s)-\frac{3}{8}a(s)^2\right\}ds\right||x-y|^{-1/2}<+\infty,$$

(B4) $$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y}}\left|\int_x^y \mathrm{Im}\left\{c(s)-\frac{a(s)b(s)}{2}+\frac{a(s)^3}{8}\right\}ds\right||x-y|^{-2/3}<+\infty.$$

これらの条件は，(B3) を除きいずれも方程式の主要部から定まる Hamilton 流に沿った低階項の可積分条件と同値であることを注意しておく。本論文における第一，第二の結果を述べる。

定理1.1 $j=1$ とする。初期値問題 (1.21)-(1.22) が L^2-適切であるための必要十分条件は(A1)，(A2) が成り立つことである。

定理1.2 $j=2$ とする。

(1) (B1), (B2), (B4) を仮定する。このとき初期値問題 (1.21)-(1.22) は L^2-適切である。

(2) 初期値問題 (1.21)-(1.22) が L^2-適切ならば(B1), (B3) が成り立つ。

定理1.1 はゲージ変換とTarama の結果を組み合わせて得られる。定理1.2 について説明する。条件 (B1) のもとでは L_2 は$L^2(\mathbb{R})$-同相なゲージ変換により次の形になる。

$$e^{-\phi_1}L_2e^{\phi_1}=D_t-D_x^4-b_1(x)D_x^2-c_1(x)D_x-d_1(x),\quad \phi_1(x)=\int_0^x\frac{a(s)}{4i}ds,$$
$$b_1(x)=b(x)-\frac{3}{8}a(x)^2+\frac{3}{2}ia'(x),\quad c_1(x)=c(x)-\frac{a(x)b(x)}{2}+\frac{a(x)^3}{8}+a''(x).$$

定理1.2 (1) は$b_1(x)$，$c_1(x)$ の虚部にそれぞれ条件 (B2), (B4) を課せば作用素 $e^{-\phi_1}L_2e^{\phi_1}$ に対する初期値問題が L^2-適切になるという事実より従う。しかしこれらの条件のうち必要でもあるのは (B1)のみであり，(B2) よりもやや制約の弱い条件である (B3)の必要性は得られたが，(B4) に対応する必要条件は得ることができなかった。

本論文における第三の結果は定理1.2 における必要，十分両条件間の差に関するものである。次の付加条件を導入する。

(B0) ある $\mu\in\mathbb{R}$ が存在して
$$\sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2\\ x\neq y}}\left|\int_x^y \mathrm{Re}\left\{b(s)-\frac{3}{8}a(s)^2-\mu\right\}ds\right||x-y|^{-1/2}<+\infty$$
が成り立つ.

定理1.3 $j=2$ とし，(B0) を仮定する。このとき初期値問題 (1.21)-(1.22) が L^2-適切であるための必要十分条件は (B1), (B2), (B4) が成立することである。

粗く言って，定理1.3 は $b_1(x)$の実部が定数に近ければ必要十分条件が得られることを主張している。

定理1.2 の証明の概略を述べる。他の定理も同様の方法で証明される。定理1.2 (1) はエネルギー法と擬微分作用素による方程式の変換を組み合わせることで得られる。まず Tarama によって導入されたある種の擬微分作用素を用いてエネルギー不等式の導出を妨げる低階項を消す。より正確には $L^2(\mathbb{R})$ における有界作用素を法として

$$F^{-1}L_2F \equiv D_t - D_x^4 - \mathrm{Re}\, b_1(x)D_x^2 + i\mathrm{Re}\, b_1'(x)D_x - \mathrm{Re}\, c_1(x)D_x$$

が成り立つような $L^2(\mathbb{R})$ の同相写像 F を，仮定を用いて0階擬微分作用素の範疇で構成する。$F^{-1}L_2F$ に関するエネルギー不等式は直ちに導くことができるので，これより L_2 に関するエネルギー不等式が得られ，(1.21)-(1.22) の L^2-適切性が従う。

一方，定理1.2 (2) は Birkhoff の漸近解の方法によって証明される。(1.21)-(1.22) が L^2-適切であるとすると Banach の閉グラフ定理より解 u は次のエネルギー不等式をみたす。

$$\|u(t,\cdot)\| \le C(T)\left(\|u_0\| + \left|\int_0^t \|f(s,\cdot)\|\,ds\right|\right) \quad (t \in [-T,T]), \tag{1.23}$$

ここで $\|\cdot\|$ は L^2 ノルムをあらわす。結論の各条件を否定して (1.23) を破綻させる漸近解の列をそれぞれ構成する。ここでも Tarama 型擬微分作用素が用いられる。

以上の結果は，数直線上の分散型方程式が適切性の妨げとなる低階項をある程度まで許容することを示唆している。これは平滑化効果に起因していると考えられるが，そのことは1次元トーラス $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ における初期値問題

$$P_ju = f(t,x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\times\mathbb{T} \quad (j = 1\,\text{or}\,2), \tag{1.27}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{T}, \tag{1.28}$$

を併せて考察することでより明確になる。ここで

$$P_1 = D_t - D_x^3 - \alpha(x)D_x^2 - \beta(x)D_x - \gamma(x),$$
$$P_2 = D_t - D_x^4 - a(x)D_x^3 - b(x)D_x^2 - c(x)D_x - d(x),$$

$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), a(x), b(x), c(x), d(x) \in C^\infty(\mathbb{T})$ とする。トーラス上では平滑化が起こらないことを注意しておく。(1.27)-(1.28) に対する L^2-適切性も定義1.3 と同様に定義される。係数に対する以下の条件を導入する。

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\,\alpha(s)\,ds = 0 \tag{C1}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left\{\beta(s) - \frac{\alpha(s)^2}{3}\right\} ds = 0, \tag{C2}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\,a(s)\,ds = 0, \tag{D1}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left\{b(s) - \frac{3}{8}a(s)^2\right\} ds = 0, \tag{D2}$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left\{c(s) - \frac{a(s)b(s)}{2} + \frac{a(s)^3}{8}\right\} ds = 0. \tag{D3}$$

本論文における第四，第五の結果を述べる。

定理1.4 $j=1$ とする。初期値問題 (1.27)-(1.28) が L^2-適切であるための必要十分条件は(C1)，(C2) が成り立つことである。

定理1.5　$j = 2$ とする。初期値問題 (1.27)-(1.28) が L^2-適切であるための必要十分条件は(D1)，(D2)，(D3) が成り立つことである。

これらの結果はトーラス上では平滑化が起こらないため低階項に対する制限が厳しくなり，適切性の特徴づけが得やすくなることを示している。

本論文により，1次元空間上の非 Kowalevski 型初期値問題は，主要部のみから定まる Hamilton 流に沿った低階項の挙動を適宜制御すれば少なくとも適切となることはわかったが，これらの条件の必要性については十分明らかにすることができなかった。今後の課題としたい。

論文審査の結果の要旨

偏微分作用素の最も基本な研究課題は，与えられた初期値問題や境界値問題等の問題が解けるのか解けないのかを判定することである。一般に実解析関数の枠組みでは多くの問題は可解であるが，無限回連続微分可能関数やそれを含む適当な枠組みでは必ずしも可解ではない。一般に可解であるか否かは後者の枠組みで考える。この意味での可解性の問題は偏微分作用素の分類理論すなわち偏微分作用素の型の理論と密接に関わっている。例えば，時間発展型の偏微分作用素が分散型であるとは，非コワレフスキー型すなわち時間変数の微分の最高階数が作用素の微分の最高階数よりも真に小さいものであって，初期値問題が未来にも過去にも一意可解であるものと定義される。分散型偏微分作用素の特徴付けの研究は，他の偏微分作用素の型である双曲型作用素・楕円型作用素・放物型作用素よりも歴史が極めて浅く，また双曲型作用素と同様に非常に精密な考察を要する。

水原柳一郎は，空間１次元の時間発展型の高階偏微分作用素が分散型であることを特徴付ける一般論を構築することを目指して，4階の偏微分方程式の初期値問題が二乗可積分関数の枠組みの中で可解となるための条件を考察した。得られた結果は以下の通りである：

1. 4階の作用素が分散型であるための弱い必要条件と，十分条件を導出した。
2. ある技術的な仮定のもとに，1の十分条件は必要条件であることを証明した。
3. トーラス上の3階と4階の分散型偏微分作用素を特徴付けた。

研究の基本的道具は擬微分作用素の表象解析に基づく超局所解析の方法である。特に偏微分作用素の主表象をハミルトン関数とするハミルトン流に沿う積分を使って表象や漸近解を構成することにより，可解性に関する精密な情報を抽出する。一般に偏微分作用素の特徴付けの結果を得ることは難しいが，本研究では，やや制限された設定の下ではあるが必要十分条件を求めていること，及びハミルトン流の時間大域的挙動における低階項の影響の重要性を指摘していることは，十分評価に値する。さらに，これらの結果は，他の枠組みでの同じ偏微分作用素の特徴付けの基礎になることは勿論，古典力学等に現れる非線型偏微分方程式の初期値問題の解法にも応用が期待される。以上のように本論文は著者が自立して研究活動を行うのに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，水原柳一郎の提出した論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。